Semaine 7

Charges axiales

PARTIE 1: (slide 6 - 18)

Poutres chargées axialement

(Chapitre 5.12 de Gere et Goodno)

PARTIE 2:

Poutres Composites

(Chapitre 6 de Gere et Goodno)

v. 2024

PROGRAMME DU COURS, semaines 6-10

6	15.10	Force internes dans les poutres non-déformées. Méthode Section et différentielle	
6	17.10	$\varepsilon(y)$ et $\sigma(y)$ en flexion pure Moment d'inertie	Série 6
7	29.10	Charge axiale. Poutre composite	Série 6
7	31.10	Quiz + Session questions & réponses	Série 1-5
8	05.11	Examen mi-semestre	
8	07.11	Flèche des poutres	Série 7
9	12.11	Flèche pour guidage flexible	Série 8a
9	14.11	Systèmes indéterminés	Série 8b
10	19.11	Flambage	Séries 9
10	21.11	Q&A	Série 10

Résumé chapitre précédent (semaine 6b)

Poutres en flexion pure ou avec forces en *y* (pas de force axiale)

- Deformation Relative normale ε_x :

$$\varepsilon_x = -\frac{y - y_0}{\rho} = -\kappa(y - y_0)$$

  - y_0: Position de l'axe neutre
  - ρ: Rayon de courbure
  - $\kappa = \frac{1}{\rho}$: Courbure
  - $y - y_0$: Distance de l'axe neutre

- y_0= Centroïde de la section transverse pour poutres mono-matériaux:

$$y_0 = \frac{\int_A y \, dydz}{\int_A dydz}$$

- Contrainte normale:

$$\sigma_x(x, y) = -\frac{M_z(x)}{I_{z,y_0}}(y - y_0)$$

  - I_{z,y_0}: Moment d'inertie de la section sur un axe parallèle à l'axe z passant par l'axe neutre
  - $I_{z,y_0} = \int_A (y - y_0)^2 \, dydz$

- $M_z(x) = \frac{E}{\rho} I_{z,y_0}$

- Contrainte normale maximum:

$$\left|\sigma_{x,max}(x)\right| = \frac{|M_z(x)|}{I_{z,y_0}} c = \frac{|M_z(x)|}{S}$$

  - c: Distance maximale vers l'axe neutre
  - $S = \frac{I_{z,y_0}}{c}$: Module d'inertie élastique

Résumé ce chapitre (semaine 7)

Poutres avec une charge axiale

- Contrainte normale pour poutre avec charge axiale et flexion:

$$\sigma_x = \frac{F_x}{A} - E\frac{y - y_0}{\rho}$$

- F_x: Charge axiale, A: section de la poutre
- y_0: Position de l'axe neutre dans la poutre en flexion pure.

- Position de l'axe neutre y_0' pour les poutres avec charge axiale :

$$y_0' = \frac{F}{M_z(x)}\frac{I_{z,y_0}}{A} + y_0$$

Poutres composites

(sans force axiale)

- Contrainte normale pour les poutres composites:

$$\sigma_x(y) = -E(y)\frac{y - y_0}{\rho}$$

- Position de l'axe neutre pour les poutres composites: $y_0 = \frac{\sum_i E_i Q_i}{\sum_i E_i A_i}$
  - $\mathrm{Q} = \int_A \, y dA$

- Contrainte normale dans les poutres composites:

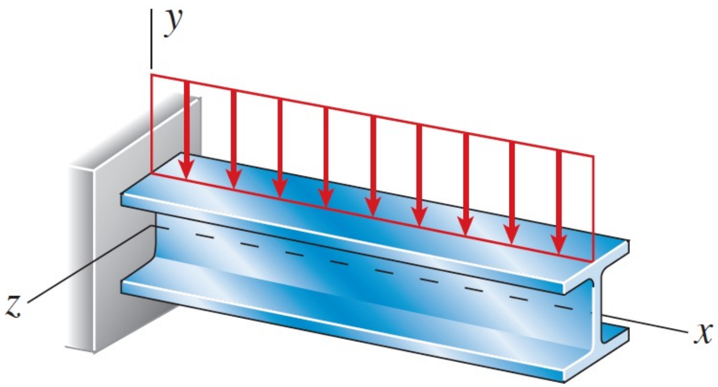
$$\sigma_x(x, y) = -\frac{E(y)M_z(x)}{\langle EI_{z,y_0}\rangle}(y - y_0)$$

- $\langle EI_{z,y_0}\rangle = \sum_i E_i I_{z,y_0,i}$
- $M_z(x) = \frac{1}{\rho}\langle EI_{z,y_0}\rangle$

Semaine 7 – partie 1
Objectifs d’apprentissage de cette section

- Savoir utiliser la superposition pour trouver
  - le nouvel **axe neutre d’une poutre mono-matériau sous charge combinée en *x* et en *y***
  - **Contrainte quand on combine charge axiale et flexion**

Que ce passe-t-il si une charge axiale (en *x*) est ajoutée à charge en *y* ?

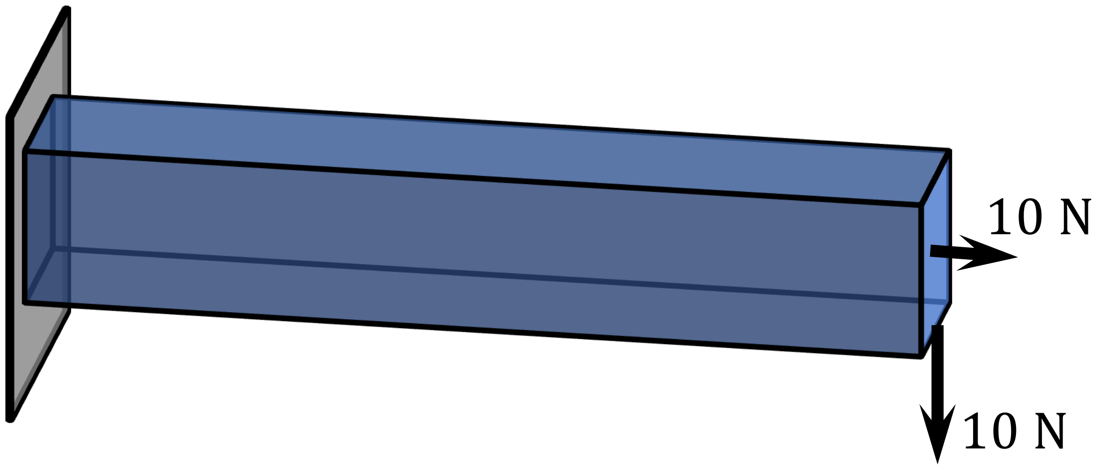


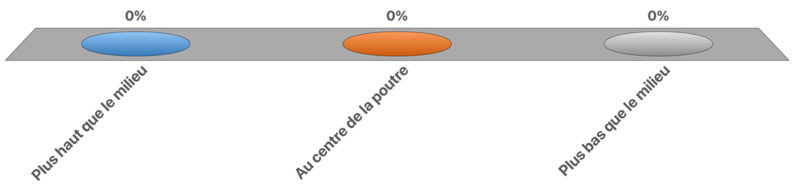
Semaine dernière
(que des moments purs
et des forces verticales)

Ces slides:
aussi des forces axiales

Où se trouve l'axe neutre?

A. Plus haut que le milieu
B. Au centre de la poutre
C. Plus bas que le milieu





Contrainte des poutres mono-matériel sous charge axiale **et** transverse

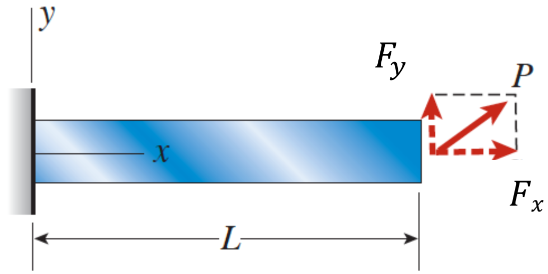
- Nous pouvons appliquer le principe de superposition et séparer le problème en:
  - Élongation pure (force normale F_x selon x)
  - Flexion pure (due par exemple à une F_y force selon y)

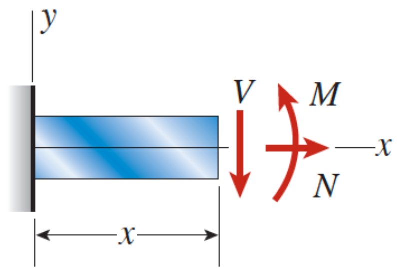
  La contrainte normale (combinée) est alors:

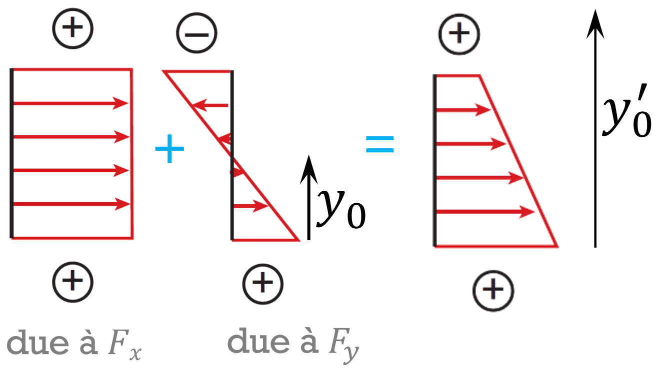
$$\sigma_x = \frac{F_x}{A} - E\,\frac{y-y_0}{\rho} = \frac{F_x}{A} - \frac{M_z(x)}{I_{z,y_0}}(y - y_0)$$

Attention y_0 est l'axe neutre en flexion pure

- rappel: axe neutre, c'est l'axe où $\sigma_x(y_0') = 0$
- **l'axe neutre y_0 calculé pour la « flexion pure » n'est plus le « vrai » axe neutre y_0' !**







Contrainte σ_x(y)

Contrainte des poutres sous charge axiale et transverse

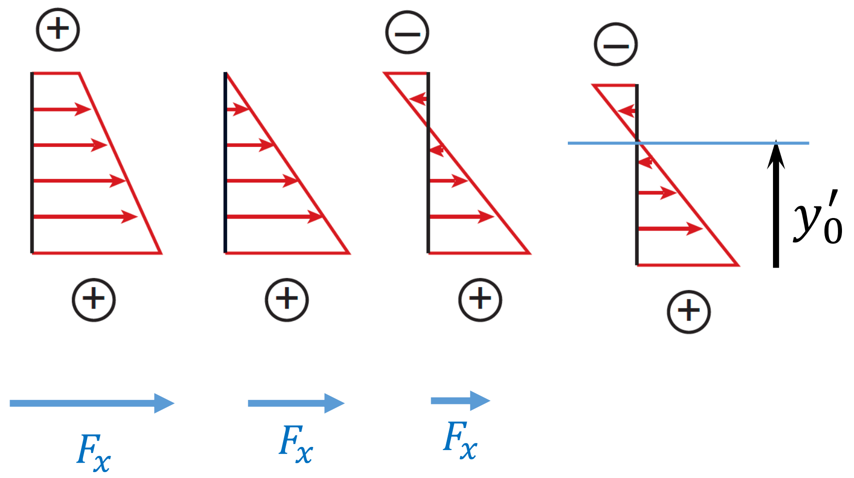
- Pour calculer la position du nouvel axe neutre y_0' (le y où $\sigma_x(y) = 0$):

$$\sigma_x(y = y_0') = 0 = \frac{F_x}{A} - E\frac{y_0' - y_0}{\rho}$$

$$y_0' = \frac{F_x}{AE}\rho + y_0$$

$$y_0' = \frac{F_x}{AE}\frac{EI_{z,y_0}}{M_z(x)} + y_0$$

$$\boldsymbol{y_0' = \frac{F_x}{M_z(x)}\frac{I_{z,y_0}}{A} + y_0}$$



- y_0' peut être à l'extérieur de la poutre !

Voir Q1 série 7

Exemple

Charge inclinée

- Calculer la position de l'axe neutre en fonction de α pour une poutre de section carrée *t*

- Nous appliquons la superposition et divisons le problème en deux :

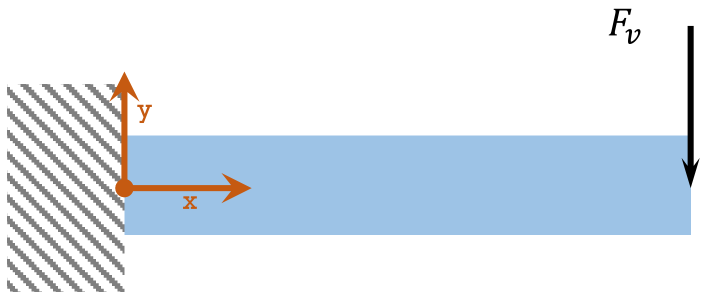
  - **Une force verticale appliquée à l'extrémité**
    $F_{vert} = F_0 \cos(\alpha)$

  - **Une force horizontale appliquée à l'extrémité**
    $F_{horiz} = F_0 \sin(\alpha)$

Exemple

Charge inclinée

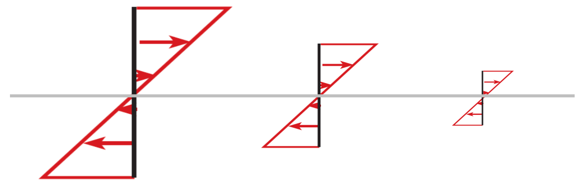
Premier problème : <u>que la force verticale</u>



- Force de cisaillement: $V(x) = F_v$
- Moment de flexion: $M_z(x) = F_v(x - L)$
- Distribution de la contrainte
  - l'origine est située au milieu de la barre. Ici $y_0 = 0$
  - $\sigma_{x,Fvert}(x,y) = -\frac{M_z(x)}{I_{z,y_0}} y$

$$\sigma_{x,Fvert}(x,y) = -\frac{F_v(x-L)}{\frac{t^4}{12}} y$$

$$\sigma_{x,Fvert}(x,y) = = -\frac{12F_0\cos(\alpha)}{t^4}(x-L)y$$



- La valeur de la contrainte à la surface de la poutre dépend de x
- L'axe neutre reste à $y = 0$

Exemple

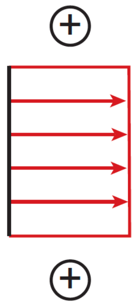
Charge inclinée

2ième problème : <u>que la force horizontale</u>

- Force interne: $N(x) = F_h$
- Répartition de la contrainte

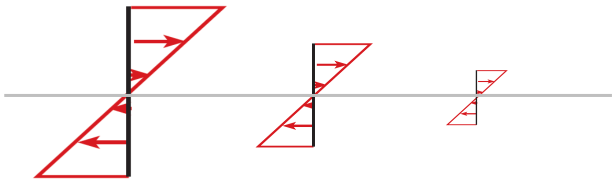
$$\sigma_{x,Fhoriz}(x,y) = \frac{F_h}{A}$$

$$\sigma_{x,Fhoriz}(x,y) = \frac{F_h}{A} = \frac{F_0 \sin(\alpha)}{t^2}$$

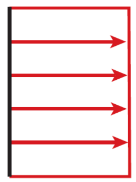


On combine (superposition) les deux contraintes

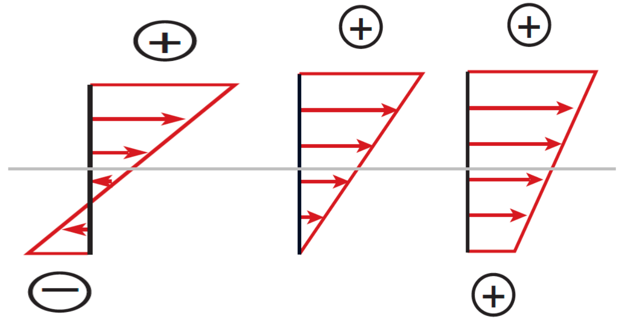
$$\sigma_{xFvert}(x,y) = -\frac{12F}{t^4}(x-L)y \qquad \sigma_{x,Fhoriz}(x,y) = \frac{F_0 \sin(\alpha)}{t^2}$$



+



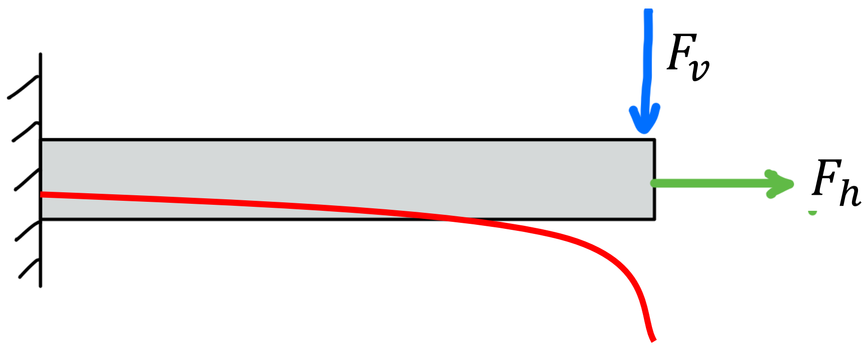
=



Contrainte du à F_v
(l'axe neutre est au centre)

Contrainte due à F_h
(constante partout)

Contrainte totale



Exemple

Charge inclinée

- **Combinons:**

$$\sigma_x(x,y) = -\frac{12F_0\cos(\alpha)}{t^4}(x-L)y + \frac{F_0\sin(\alpha)}{t^2}$$

- La position à laquelle le contrainte (et la déformation relative) valent zéro est $y = y_o'$:

$$\sigma_x(x, y_o') = 0$$

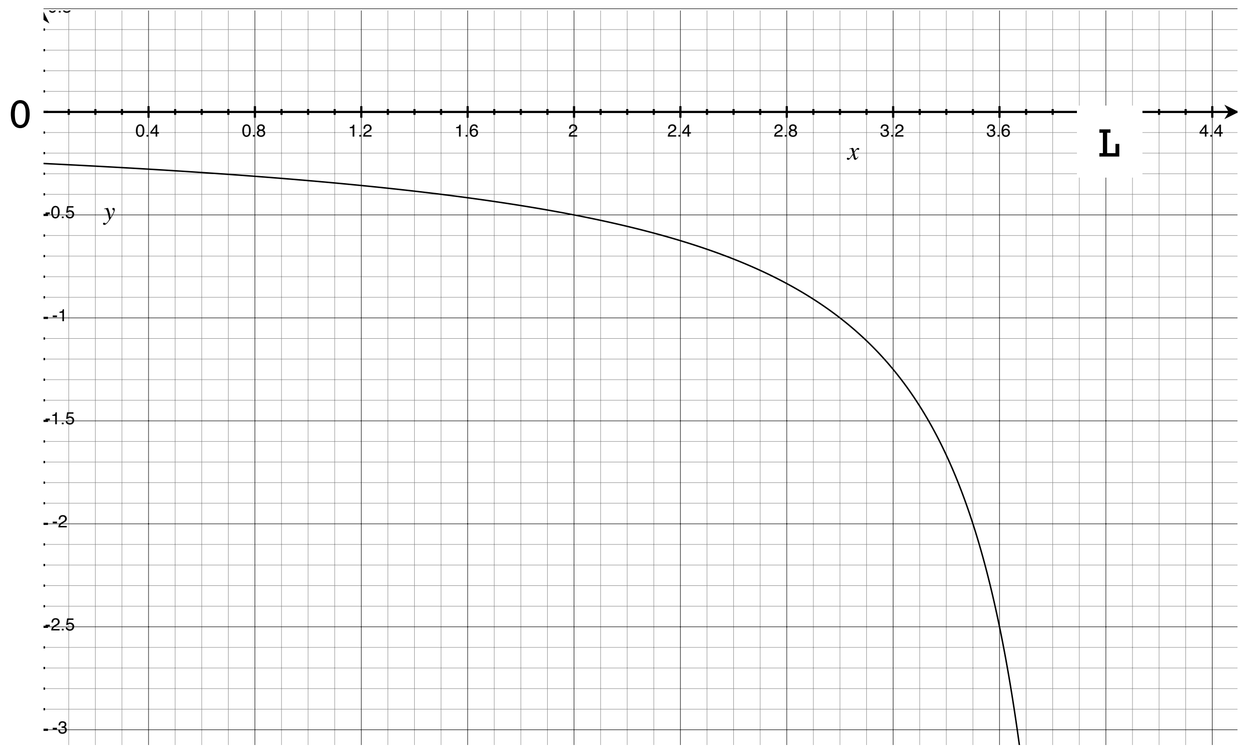
$$-\frac{12F_0\cos(\alpha)}{t^4}(x-L)y_o' + \frac{F_0\sin(\alpha)}{t^2} = 0$$

$$y_o' = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}\frac{t^2}{12}\frac{1}{x-L} \quad = \quad \frac{t^2}{12}\frac{\tan(\alpha)}{x-L}$$

- La position de l'axe neutre (où $\sigma_x(x) = 0$) n'est pas constante le long de la poutre!

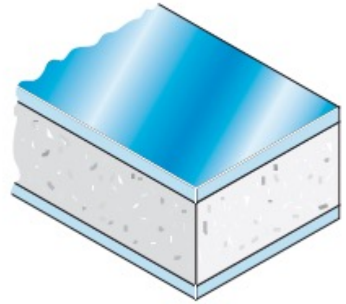
Positon axe neutre en fonction de x

y_o'



Diverge vers $-\infty$ pour $x = L$

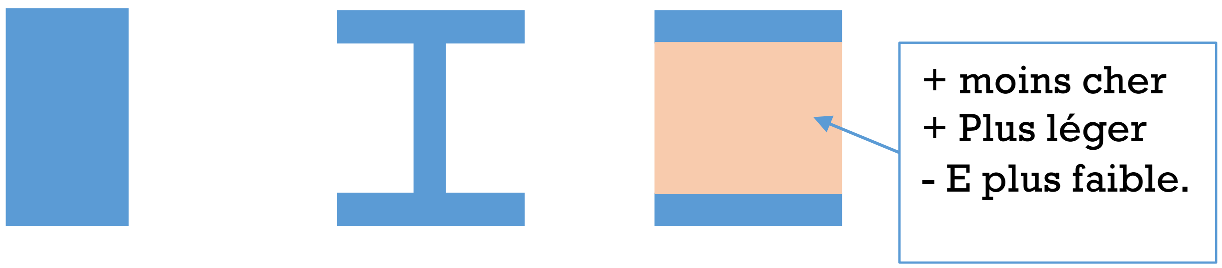
Semaine 7 – partie 2
Objectifs d'apprentissage



- **Pour des poutres composites:**
  - Exprimer la déformation relative $\varepsilon_x(x, y)$dans les différentes couches
  - savoir que $\varepsilon_x(x, y)$ est continue
  - Exprimer les contraintes $\sigma_x(x, y)$ dans les différentes couches
  - savoir que $\sigma_x(x, y)$ est **dis**continue
  - Calculer l'axe neutre d'une poutre composite
  - Formule flexion pour poutres composites

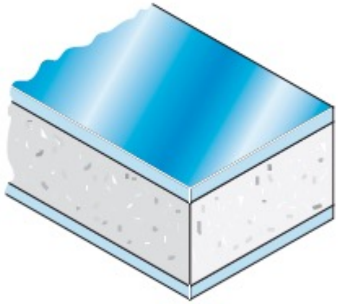
Poutres composites

- Jusqu’à maintenant, les poutres ont été homogènes, faites d'un seul matériau.
- Nous avons vu que certaines sections sont plus efficaces que d'autres; elles peuvent mieux résister aux charges (moment d’inertie I_z)
- nous pouvons faire (beaucoup) mieux avec des composites
  - comprendre la distribution des contraintes et déformations permet de concevoir des poutres plus performantes, plus légères, moins chères, plus efficaces

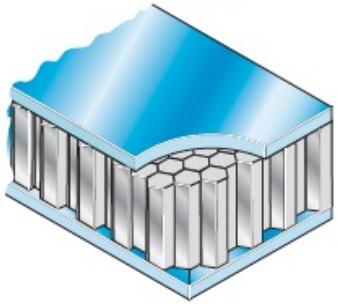


On met à l'extérieur de la poutre le matériau “costaud” car c’est la que les contraintes sont élevées.

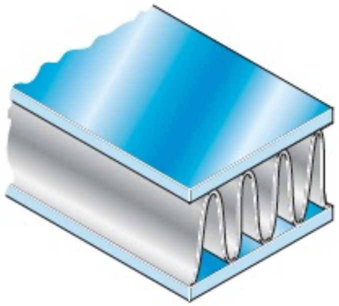
Au centre, peu de contraintes, on peut utiliser un matériau léger et « faible ».



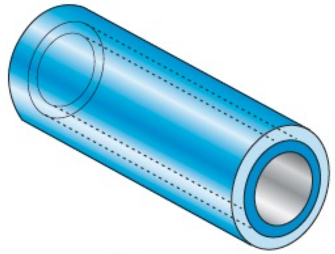
(a)



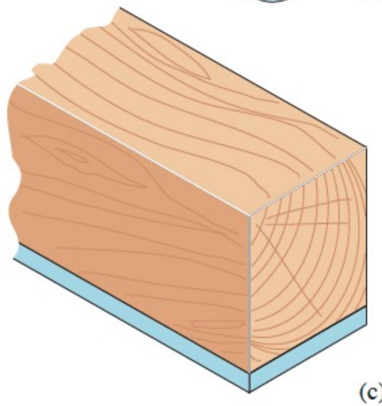
(b)



(c)



(b)

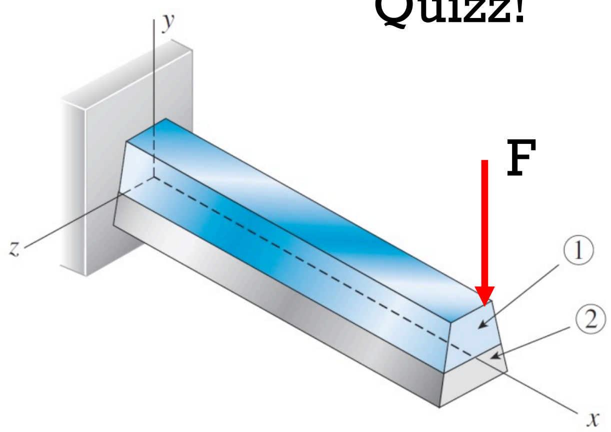


(c)

Quizz!

Déformation relative ε_x dans une poutre composite:

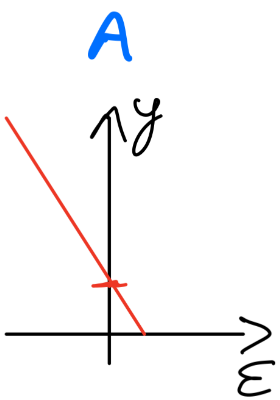
quel graphe est juste?



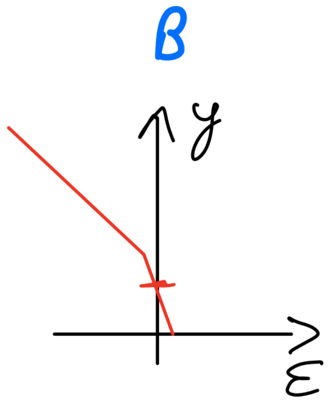
A. A

B. B

C. C

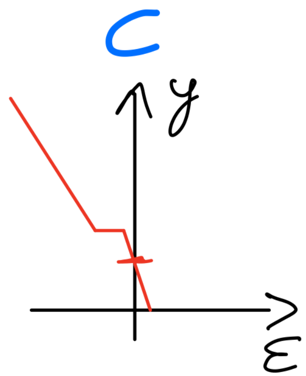


$\varepsilon_x \propto (y - y_0)$



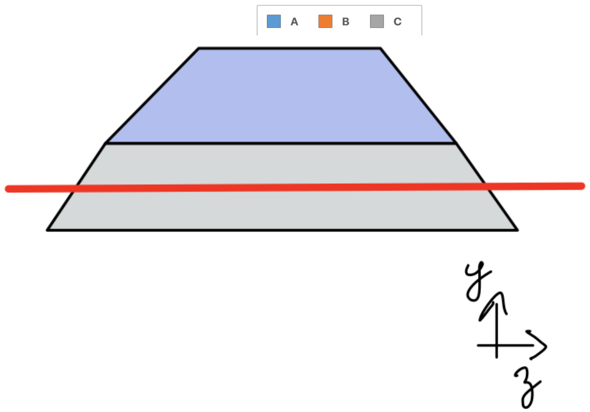
$\varepsilon_x \propto (y - y_0)$

Pour chaque matériau (pente différente)



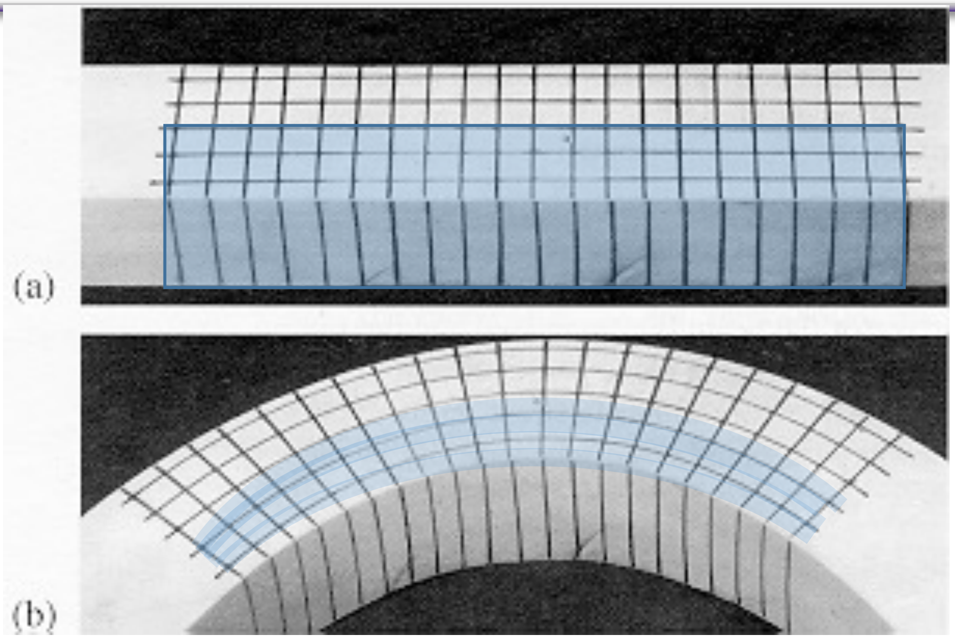
$\varepsilon_x \propto (y - y_0)$

Pour chaque matériau et discontinuité à l'interface



Pour une courbure donnée, la déformation de la poutre ne dépend pas de sa composition

$$\varepsilon_x = -\frac{y - y_0}{\rho}$$



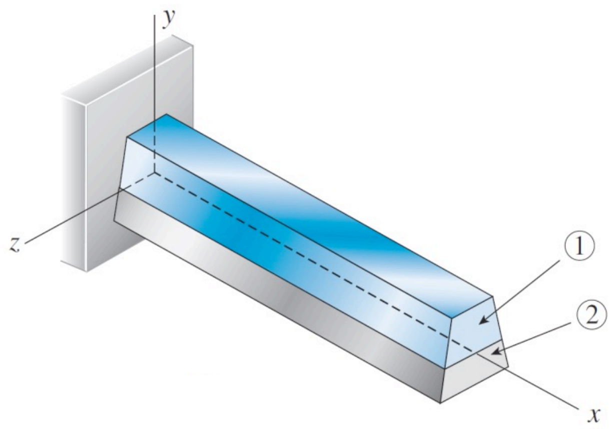
Hypothèse: les plans normaux à l'axe de la poutre avant la flexion resteront plans après fléchissement

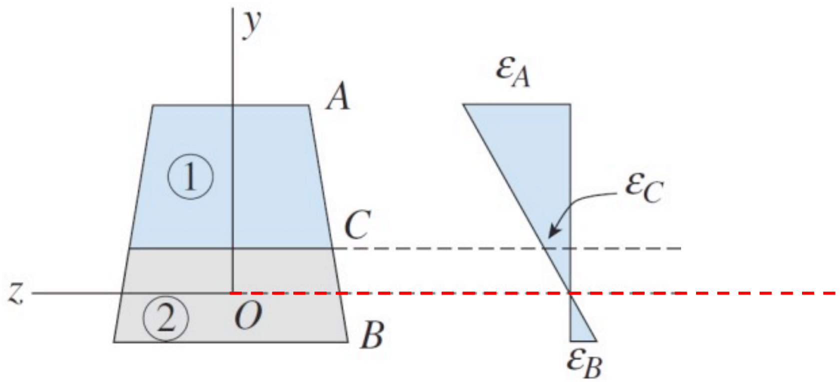
Déformation relative ε_x dans une poutre Composite en flexion pure

- Les plans normaux à l'axe de la poutre avant la flexion restent plans après fléchissement
- Après déformation, l'axe neutre garde la même longueur
- Mais pour toute autre ligne parallèle à l'axe neutre:

$$ds = \big(\rho - (y - y_0)\big)\, d\theta = ds_0 - (y - y_0)\,\frac{ds_0}{\rho} \quad \rightarrow \quad \boxed{\varepsilon_x = -\frac{y - y_0}{\rho}}$$

comme pour une poutre mono-matériau, raisonnement identique





- Dans cette figure, $y = 0$ a été placé à l'axe neutre
- attention: l'axe neutre d'un composite n'est pas situé au centroïde de l'objet!

Contraintes normales σ_x dans poutre Composite

Flexion pure - Contrainte normale σ_x en fonction de y

- $\varepsilon_x = -\frac{y-y_0}{\rho}$
- le calcul de la contrainte σ_x est différent que dans une poutre mono-matériau
- Utiliser la loi de Hooke?

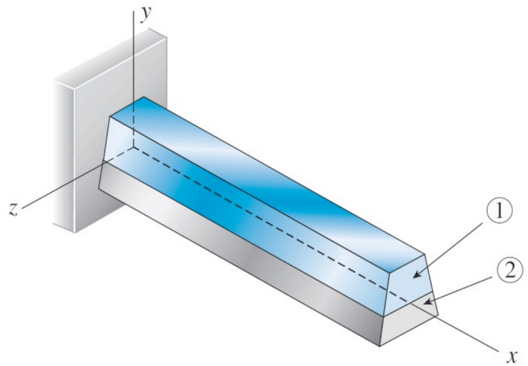
$$\cancel{\sigma_x = E\,\varepsilon_x = -E\,\frac{y-y_0}{\rho}}$$

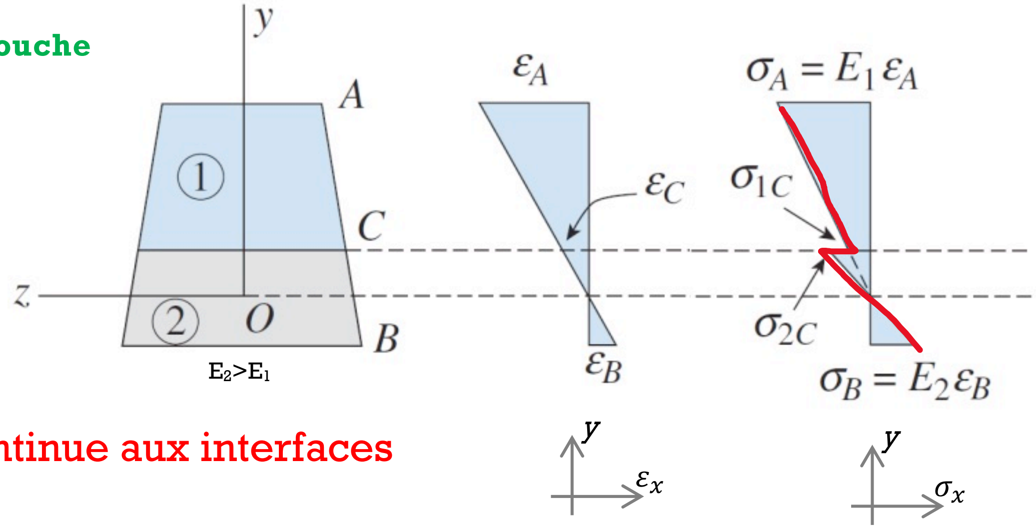
Oui, mais **pas de façon globale**: il faut Hooke **couche par couche**

$$\sigma_A = E_1\varepsilon_A \qquad \sigma_B = E_2\varepsilon_B$$

$$\boxed{\sigma_{x,i} = E_i\varepsilon_x = -E_i\,\frac{y-y_0}{\rho}}$$

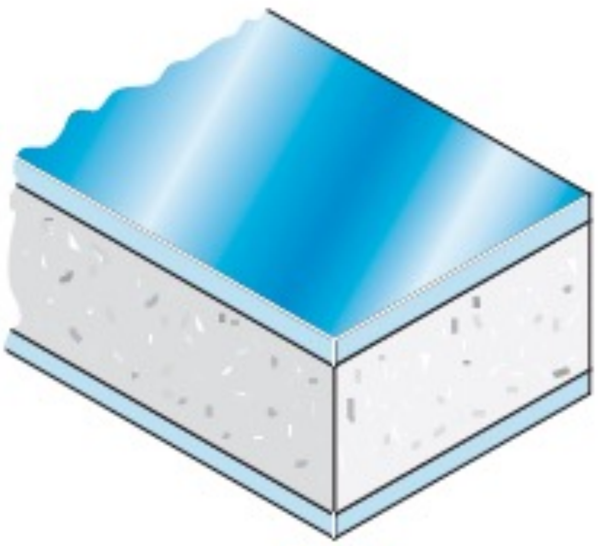
$\varepsilon(y)$ est continue, mais $\sigma(y)$ peut être discontinue aux interfaces



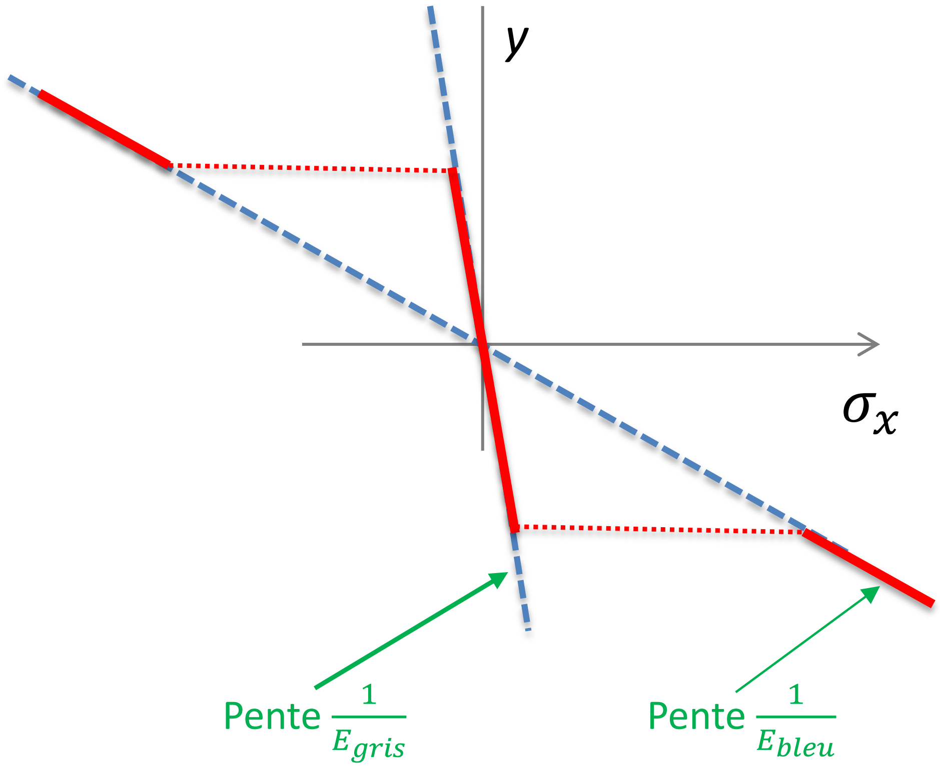


$\boldsymbol{\varepsilon_x(y)}$ est continue partout

$\boldsymbol{\sigma_x(y)}$ n'est pas continue aux interfaces!



$$E_{bleu} > E_{gris}$$



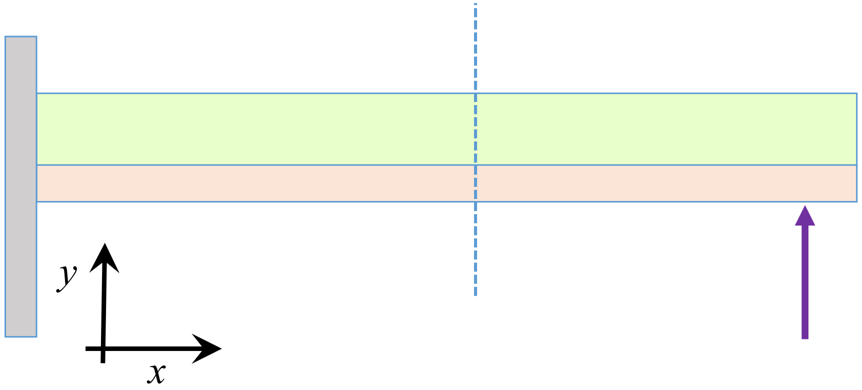
Est-ce qu'on peut déplacer la zone de contrainte max en tirant sur une poutre **composite**?

A. Vrai

B. Faux

Calcul de l'axe neutre pour une poutre composite

Sans forces axiales, exemple poutre 2 matériaux



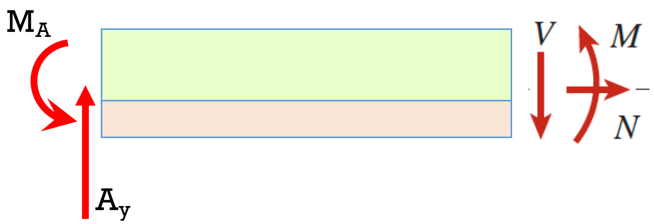
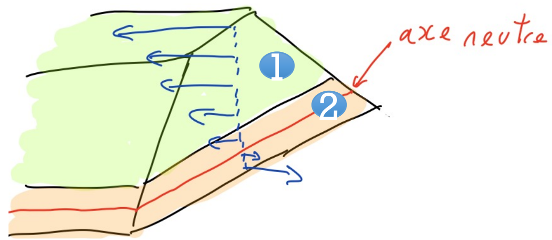


Diagramme des forces de la Poutre avec forces *sans déflection*

Nous « coupons » (méthode des sections)

Comme zéro force axiale externe, l'équilibre des forces en x donne $N(x) = 0$:

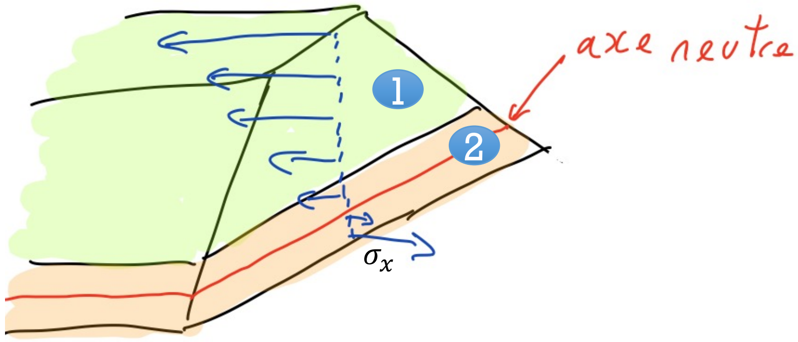
$$\sum F_x = N = 0$$



Même poutre avec forces *avec déflection*
Les contraintes en x dépendent de y

Calcul de l'axe neutre pour une poutre composite

Sans forces axiales, exemple poutre 2 matériaux



$$N = 0 = \iint \sigma_x \, dA$$

$$N = 0 = \iint_{\text{section1}} \sigma_{x1} \, dA + \iint_{\text{section2}} \sigma_{x2} \, dA$$

$$\sigma_{x,i} = -E_i \frac{y - y_0}{\rho}$$

$$E_1 \iint_{\text{section1}} (y - y_0) \, dydz + E_2 \iint_{\text{section2}} (y - y_0) \, dydz = 0$$

$$\boxed{y_0 = \frac{E_1 \iint_1 \, y \, dydz + E_2 \iint_2 \, y \, dydz}{E_1 \iint_1 \, dydz + E_2 \iint_2 \, dydz}}$$

∽ Moyenne pondérée

Attention au choix de l'origine pour les intégrales

Calcul de l’axe neutre pour une poutre composite

Sans forces axiales

- Plus généralement, pour une poutre avec *n* régions différentes dans la section

$$0 = N = \iint \sigma_x(x,y)\, dy\, dz = \sum_i \iint E_i \varepsilon_x(x,z)\, dy\, dz = -\sum_i E_i \iint_{zone\ i} \frac{(y-y_0)}{\rho} dy\, dz = 0$$

chaque intégrale est seulement sur la section yz du matériau *i:*

$$y_0 = \frac{\sum_i \int E_i \frac{y}{\rho} dA_i}{\sum_i \int \frac{E_i}{\rho} dA_i} = \frac{\sum_i \int E_i y\, dA_i}{\sum_i \int E_i\, dA_i} = \frac{\sum_i E_i \int_{mat-i} y\, dy\, dz}{\sum_i E_i \int_{mat-i} dy\, dz} = \boxed{\frac{\sum_i E_i Q_i}{\sum_i E_i A_i} = y_0}$$

C’est un centroïde pondéré par le module de Young

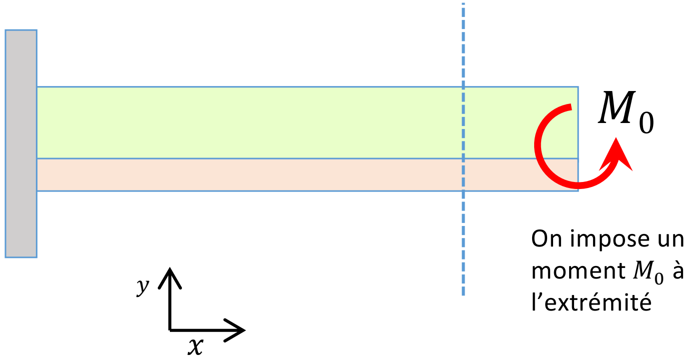
$$\boxed{Q_i = \int_{matériau\ i} y\, dy\, dz}$$

$$\boxed{A_i = \int_{matériau\ i} dy\, dz}$$

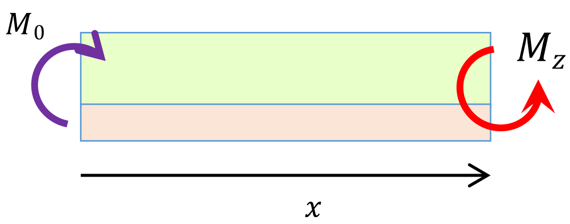
intégrales dans plan yz

Contraintes normales dans une poutre Composite

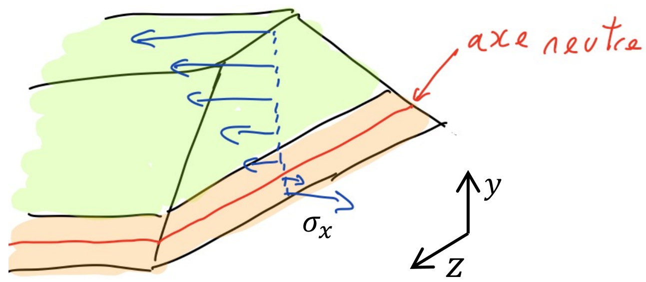
Lien entre Moment de flexion $M_z(x)$ et Contraintes normales $\sigma_x(x, y)$



On impose un moment M_0 à l'extrémité



$M_z(x) = M_0$ et $N(x) = 0$



Statique donc $\sum M = 0$ pour chaque section du plan yz

$$M_z(x) + \iint \sigma_x(x, y)(y - y_0)\, dA = 0$$

Moment des forces $\sigma_x(x, y)$ à partir de l'axe neutre

Contraintes normales dans une poutre Composite

Lien entre Moment de flexion $M_z(x)$ et Contraintes normales $\sigma_x(x,y)$

Nous pouvons calculer le moment créé par les contraintes normales (par rapport à l'axe neutre)

$$M_z(x) = -\iint \sigma_x(x,y)(y-y_0)\,dA = \sum_i \iint E_i \frac{(y-y_0)^2}{\rho} dA$$

$$M_z(x) = \frac{1}{\rho}\langle EI_{z,y_0}\rangle$$

avec $$\boxed{\langle EI_{z,y_0}\rangle = \sum_i E_i \iint (y-y_0)^2\,dA = \sum_i E_i I_{z,y_0,i}}$$

Rigidité en flexion

$$\boxed{\sigma_x(x,y) = -\frac{E(y)M_z(x)}{\langle EI_{z,y_0}\rangle}(y-y_0)}$$

Formule flexion pour poutres composites

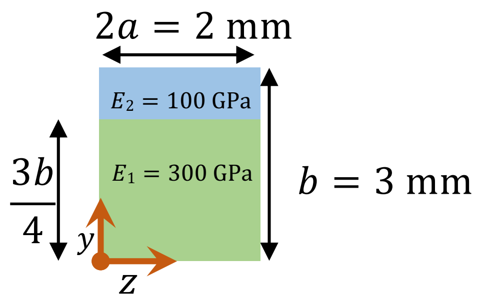
- Note: Si l'origine est prise sur l'axe neutre: $y_0 = 0$

$I_{z,y_0,i}$ = moment d'inertie de l'objet "i" par rapport à l'axe neutre y_0 du composite (pas par rapport à l'axe neutre de l'objet i !)

Exemple composite.

Poutre composite avec 2 charges ponctuelles selon y

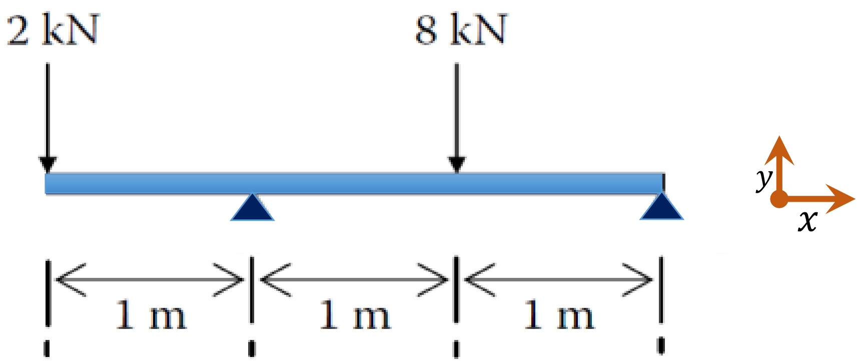
- **Trouver les coordonnées x et y des points où la contrainte normale sera maximum**



poutre de section rectangulaire, 2 matériaux

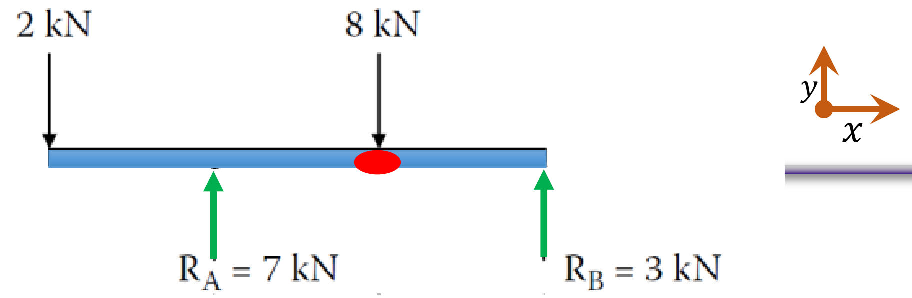
$$\sigma_x(x,y) = -\frac{E(y)M_z(x)}{\langle EI_{z,y_0}\rangle}(y - y_0)$$

- Pour maximiser σ_x nous devons:
  1. Trouver x pour lequel $M_z(x)$ est maximum
  2. Trouver y pour lequel $E(y)(y - y_0)$ est maximum
  3. Calculer $\langle EI_{z,y_0}\rangle$



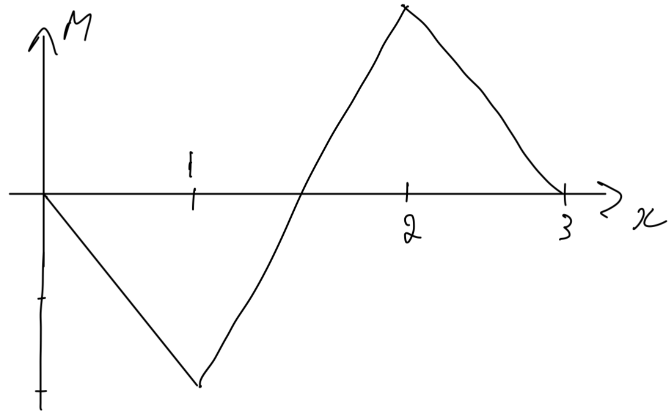
$E_1 = 300$ Gpa
$E_2 = 100$ GPa

Exemple composite



- Partie 1:
  - Calculer (puis maximiser) $M_z(x)$

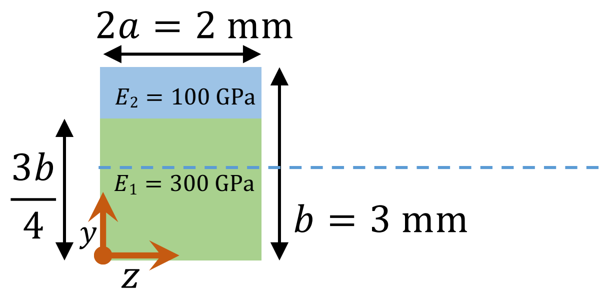
$$V(x) = \begin{cases} -2\text{ kN} & 0 \leq x \leq 1 \\ 5\text{ kN} & 1 \leq x \leq 2 \\ -3\text{ kN} & 2 \leq x \leq 3 \end{cases} \qquad M_z(x) = \begin{cases} -2x\ kN.m & 0 \leq x \leq 1 \\ 5x - 7kN.m & 1 \leq x \leq 2 \\ -3x + 9kN.m. & 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$



- $M_z(x)$ est maximum pour $x = 2$ m; $\qquad M_z(x = 2\text{ m}) = 3\,\frac{\text{kN}}{\text{m}}$

Exemple composite

- Partie 2
  - Maximiser $E(y)(y - y_0)$
  - Nous calculons d'abord la position de l'axe neutre:



$$y_0 = \frac{\sum_i \int E_i y \, dA}{\sum_i \int E_i \, dA}$$

$$y_0 = \frac{E_1 \int_{z=0}^{z=2a} dz \int_0^{\frac{3b}{4}} y \, dy + E_2 \int_{z=0}^{z=2a} dz \int_{3b/4}^{b} y \, dy}{E_1 \int_{z=0}^{z=2a} dz \int_0^{\frac{3b}{4}} dy + E_2 \int_{z=0}^{z=2a} dz \int_{3b/4}^{b} dy}$$

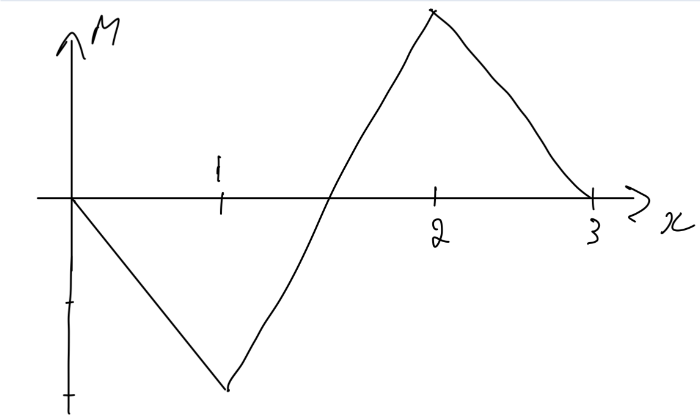
$$= \frac{300 \text{ GPa} \cdot 2a \cdot \int_0^{\frac{3b}{4}} y \, dy + 100 \text{ GPa} \cdot 2a \cdot \int_{\frac{3b}{4}}^{b} y \, dy}{300 \text{ GPa} \cdot 2a \cdot \frac{3b}{4} + 100 \text{ GPa} \cdot 2a \cdot \frac{b}{4}}$$

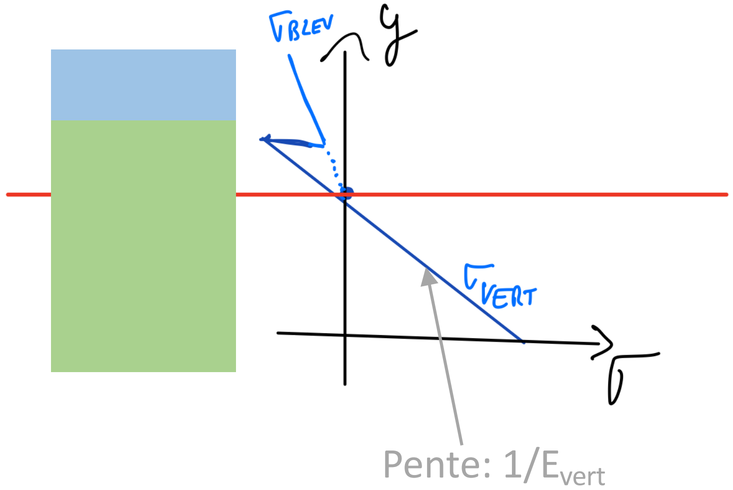
$$y_0 = \frac{17}{40} b = 0.425b$$

notez que
$y_0 < 0.5b$ car $E_1 > E_2$
$y_0 > \frac{3}{8} b$ car la partie bleue existe

$$\sigma_x(x,y) = -\frac{M_z(x)}{\langle EI_{z,y_0}\rangle} E(y)(y - y_0)$$

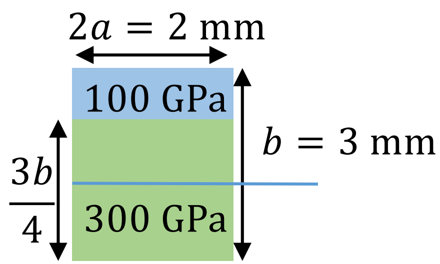
$$M_z(x) = \begin{cases} -2x\ kN.m & 0 \le x \le 1 \\ 5x - 7kN.m & 1 \le x \le 2 \\ -3x + 9kN.m. & 2 \le x \le 3 \end{cases}$$



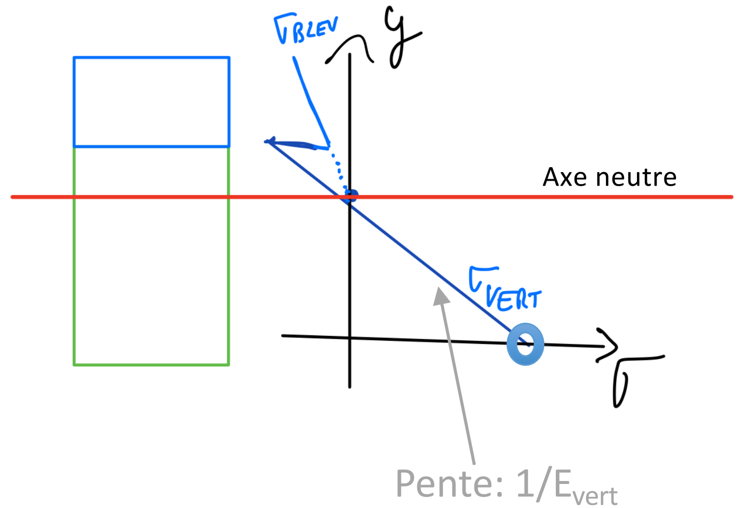


Pour un *x* donné

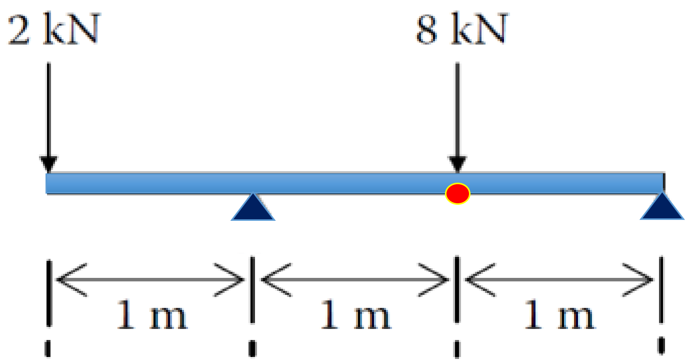
$$\sigma_x(x,y) = -\frac{M_z(x)}{\langle EI_{z,y_0}\rangle} E(y)(y-y_0)$$



- Partie 2: Maximiser $E(y)(y-y_0)$
  - Nous avons trouvé l'axe neutre: $y_0 = \frac{17}{40}b$
  - Nous comparons $E_i(y-yo)$ sur la surface supérieure et la surface inférieure de la poutre, car c'est à ces endroits que $(y-y_0)$ est le plus grand.
    - $E(y_{top})|y_{top}-y_0| \;=\; E(y=b)\left|b-\frac{17}{40}b\right| \;=\; 100\text{GPa}\cdot\frac{23}{40}b \;=\; 57.5\text{ GPa b}$
    - $E(y_{bot})|y_{bot}-y_0| \;=\; E(y=0)\left|0-\frac{17}{40}b\right| \;=\; 300\text{GPa}\cdot\frac{17}{40}b \;=\; 127.5\text{ GPa b}$
  - Le maximum de $E(y)(y-y_0)$ est donc tout en bas de la poutre à $y=0$



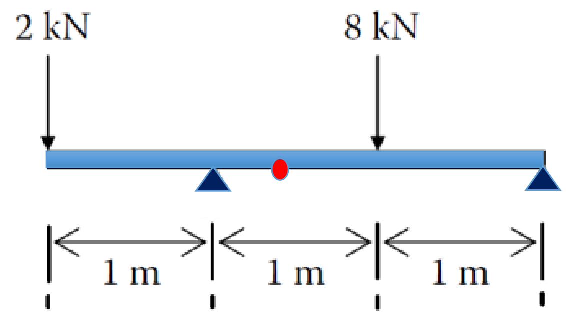
La contrainte est maximum à *x*=2 m et *y*=0 m


2 kN
8 kN
1 m
1 m
1 m

Exemple composite

$$\sigma_x(x,y) = -\frac{E(y)M_z(x)}{\langle EI_{z,y_0}\rangle}(y-y_0)$$

- Partie 3: **Calcul de $\langle EI_{z,y_0}\rangle$**

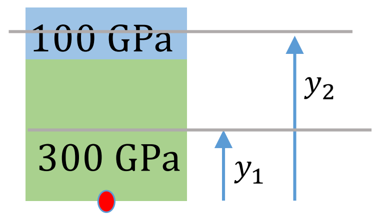


$$\langle EI_{z,y_0}\rangle = E_1 I_{1,yo} + E_2 I_{2,yo} =$$

$$= E_1(\, I_{1,y1} + A_1(y_1-y_0)^2) + E_2(\, I_{2,y2} + A_2(y_2-y_0)^2)$$

(utiliser Steiner pour décaler les axes pour le calcul des I_i, y_o)

$$I_{1,y1} = \frac{(2a)(3b/4)^3}{12} \qquad I_{2,y2} = \frac{(2a)(b/4)^3}{12}$$



$$y_1 = \frac{3b}{8}$$

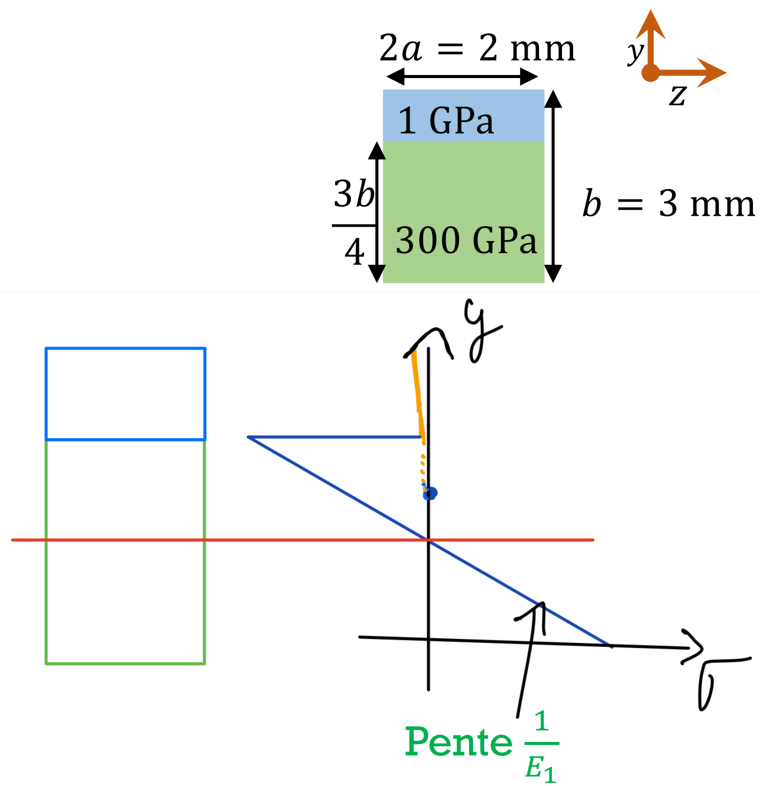
$$y_2 = \frac{b}{8} + \frac{b}{2}$$

Puis un peu d'algèbre pour trouver $\langle EI_{z,y_0}\rangle$ …

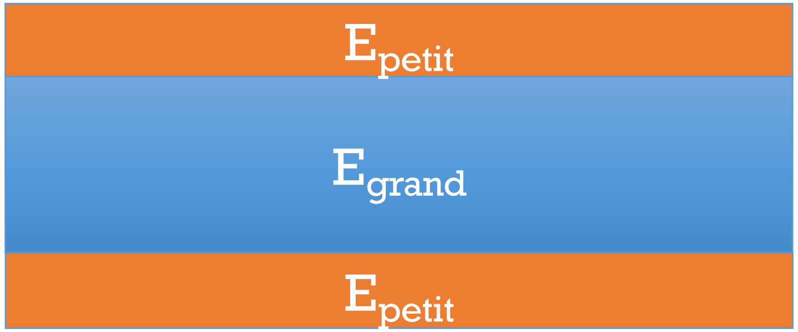
Est-ce que le maximum de $E(y)(y - y_0)$ aurait pu être à l'interface? Par exemple, si la partie bleu est souple, eg E_{bleu} = 1 GPa ?

- Dans ce cas, les contrainte à $y = 0$ (en bas) et à $y = 3b/4$ (l'interface) seront quasi-égales, et toutes 2 beaucoup plus grandes qu'à y=b (le dessus)

- Mais toujours contrainte bas > contrainte à interface, car y_0 sera toujours juste un poil plus haut que $3b/8$, car la partie molle bleue décallera toujours l'axe neutre vers le haut.



Ici, à 3 couches, la contrainte max est aux interfaces



Dans ce cas, la contrainte peut être maximum aux interfaces plutôt qu'aux bords de la poutre